

## Note sul comportamento di microgoccioline d'acqua in aria

Marco Potenza – aprile 2020

Queste note sono rivolte agli studenti e a tutti gli interessati ad una comprensione e una descrizione elementare dei fenomeni che regolano la presenza di goccioline di liquido in aria. Nascono dalla curiosità di capire un fenomeno fisico legato ad aspetti di cui si parla diffusamente in questo periodo, e si propongono di suggerire uno spunto di riflessione critica.

Si sente parlare della presenza in aria di patogeni, recentemente a proposito del virus SARS-COVID-2, veicolati mediante goccioline espulse dall'apparato respiratorio a causa della normale respirazione, del parlare, di eventi di tosse o di starnuti. Di qui la discussione continua su quali siano i presidi necessari, migliori, utili o inutili, che si possano o debbano utilizzare per proteggersi dal contagio.

E' noto che la trasmissione delle malattie respiratorie è in buona parte dovuta alla contaminazione dell'aria da parte di patogeni veicolati dalle goccioline espulse dall'apparato respiratorio. I parametri che influenzano il contagio sono principalmente la dimensione e la concentrazione delle goccioline in sospensione, la concentrazione dei patogeni nelle goccioline, ma lo sono anche la temperatura e l'umidità dell'aria. Un altro aspetto rilevante è la capacità del patogeno di sopravvivere al di fuori della gocciolina che evapora in tempi relativamente brevi. Infine, la dimensione del patogeno influisce sulla capacità di trasporto da parte delle goccioline.

Scopo di queste note non è di rispondere a queste domande. Piuttosto cercare di fare ordine nelle informazioni relative unicamente al comportamento delle goccioline in aria, fornendo gli elementi di base necessari per comprendere i limiti del problema nonché i motivi per cui è così difficile rispondere alle domande relative ai presidi e alla loro efficacia.

Farò riferimento ad un lavoro che si trova disponibile a tutti su internet che mostra alcuni aspetti relativi alla tematica: si trova qui: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s12273-016-0290-7.pdf>. Mediante simulazioni numeriche e risultati sperimentali in questo lavoro viene discusso il comportamento di goccioline di dimensioni diverse, classificate in a) grandi (100 micron), b) medie (10 micron), c) piccole (<2 micron), espulse da un individuo e lasciate libere di muoversi nell'aria circostante. Altri lavori a cui mi sono riferito non sono consultabili pubblicamente. Un lavoro in cui si trova una sintesi dei risultati di lavori volti alla determinazione delle caratteristiche delle goccioline emesse dall'uomo è il seguente: H. Zhang, D. Li, L. Xie, Y. Xiao, Documentary Research of Human Respiratory Droplet Characteristics, *Procedia Engineering* 121 (2015)1363-1374.

Quasi tutti i lavori che ho letto riguardo alle distanze di protezione da un individuo infetto fanno riferimento al seguente lavoro del 1934: *W. F. Wells, On air-borne infection - Study II Droplets and droplet nuclei, American Journal of Hygiene. 20(1934)611-618.*

L'obiettivo di queste note è di fornire un modello semplificato per rispondere ad una domanda molto semplice: quale è il comportamento delle goccioline una volta rilasciate in aria? Ne emerge una descrizione molto semplice, che risulta comune a molti ambiti della Fisica e che può essere di interesse per studenti e curiosi.

Di seguito descriveremo come si comportano le goccioline come entità ideali. Non verranno invece discussi argomenti quali la concentrazione delle goccioline in aria e la sua evoluzione nel tempo, e neppure la concentrazione, la sopravvivenza e la potenzialità infettiva dei patogeni presenti nelle goccioline.

## Le goccioline oggetto di studio

Per poter dare una descrizione quantitativa del comportamento delle goccioline dobbiamo sapere di cosa sono composte e quanto sono grandi. Facendo un'approssimazione piuttosto rozza, in linea con quanto discusso sopra, assumeremo che siano composte di acqua pura. Per le dimensioni, facendo riferimento a diverse pubblicazioni, si trova che l'intervallo dimensionale si attesta all'incirca tra 0.1-100 micron. Inoltre, tale intervallo non cambia apprezzabilmente tra persone sane e malate. Per completezza, riportiamo qui di seguito alcuni dettagli che non entreranno però nella descrizione e discussione successiva. La maggior parte delle goccioline emesse parlando e con la respirazione normale possiede dimensioni tra 0.1-10 micron circa. Con la tosse una persona sana espelle gocce tra 0.1-15 micron, mentre una malata tra 0.1-5 micron. Tra respiro normale e tosse, come anche tra persone sane e malate cambiano le distribuzioni dimensionali. Si noti che la presenza di poche goccioline grandi non significa che non siano importanti ai fini del trasporto di patogeni: una sola goccia da 100 micron ha il volume di 1000 gocce da 10 micron!

La velocità di espulsione delle goccioline dipende dalla condizione di espulsione: il normale respiro le muove a velocità comprese tra 0.1-1 m/s; parlando a voce alta la velocità cresce nell'intervallo 2-10 m/s; con la tosse la velocità raggiunge i 10-20 m/s. Uno starnuto può espellerle ancora più velocemente. Le velocità mostrano differenze apprezzabili tra uomini e donne (fino al 50% maggiori per gli uomini). Come vedremo meglio in seguito, le velocità riportate sono anche quelle del fluido che le circonda. Questo connubio rappresenta l'elemento e il risultato a cui ci porta la descrizione dei fenomeni qui analizzati.

Vediamo quindi di descrivere quantitativamente i fenomeni a cui è sottoposta una gocciolina. Si tratta di descrivere, in un ordine che sarà chiaro in seguito, i fenomeni di cinetica di caduta in aria ed evaporazione in volo. Questo fornirà gli elementi per capire come avvenga il trasporto in dipendenza dai parametri ambientali.

## Cinetica di una goccia sferica in aria

La resistenza al movimento di un oggetto in moto rispetto al fluido che lo circonda è tradizionalmente descritta facendo riferimento al *Numero di Reynolds*, una quantità adimensionale che permette di stabilire se il moto avvenga in condizioni di flusso laminare, o di Stokes, oppure in flusso turbolento. Tale grandezza è definita come segue:

$$Re = \frac{\rho_a r v}{\eta}$$

$\rho_a = 1.2 \text{ kg/m}^3$  è la densità dell'aria

$r$  è il raggio della gocciolina in m

$v$  è la velocità della gocciolina in m/s

$\eta = 18 \text{ } \mu\text{Pa s}$  è la viscosità dinamica dell'aria

Per  $Re < 0.25$  si hanno condizioni di moto laminare, altrimenti il moto diventa turbolento.

Nel caso di flusso laminare si può immaginare che gli strati di fluido scorrano l'uno sull'altro e la resistenza al moto sia sostanzialmente dovuta all'attrito tra di essi. Le piccole irregolarità del flusso vengono distrutte rapidamente. In tal caso si utilizza la Legge di Stokes per la forza che descrive la resistenza viscosa:

$$F = 6\pi\eta r v$$

Nel caso di flusso turbolento, a cui qui accenniamo solamente, la resistenza viscosa è descritta da una forza che dipende dal quadrato della velocità:

$$F = \frac{1}{2} C_d \rho_a A v^2$$

$A$  = sezione dell'oggetto nella direzione di moto

$C_d$  = coefficiente di *drag*: dipende da  $Re$  e dal corpo

In questo caso il flusso non è assimilabile allo scorrimento di sottili strati laminari, le irregolarità del flusso vengono fatte crescere anziché venire distrutte e questo altera l'attrito viscoso.

Si ottiene che nel caso laminare,  $Re < 0.25$ ,  $C_d = \frac{12\eta}{\rho_a r v}$ .

Il flusso turbolento quindi rallenta maggiormente una gocciolina rispetto a quanto non avverrebbe alla stessa se si trovasse in flusso laminare. Questo significa che la resistenza viscosa stimata applicando il regime di Stokes nei casi in cui  $Re > 0.25$  porta a una *sottostima* dell'attrito subito dalla gocciolina.

La forza di gravità a cui è soggetta una gocciolina è data da:

$$F_g = m g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_L g$$

$\rho_L = 998 \text{ kg/m}^3$  rappresenta la densità dell'acqua

$g = 9.81 \text{ m/s}^2$  è l'accelerazione di gravità

All'equilibrio di queste due forze la velocità della gocciolina è costante nel tempo, e vale:

$$v_s = \frac{2 \rho_a \rho_L g r^2}{9 \eta}$$

Questa si dice *velocità di sedimentazione* della gocciolina.

E' quindi possibile esprimere il Numero di Reynolds di una gocciolina che cade alla propria velocità di sedimentazione:

$$Re = \frac{4}{9} \frac{\rho_a \rho_L g r^3}{\eta^2}$$

La condizione  $Re < 0.25$  che garantisce il flusso laminare di una gocciolina d'acqua che cade in aria a STP si traduce in  $r < 25 \mu\text{m}$ .

Quando il flusso non è laminare l'attrito viscoso cresce e di conseguenza la velocità di sedimentazione decresce. In questo caso quindi l'approssimazione di Stokes utilizzata per  $Re > 0.25$  porta a una *sovrastima* della velocità di sedimentazione.

In Figura 1 viene rappresentata la dipendenza della velocità di sedimentazione in aria in funzione del diametro della gocciolina. Si noti che gli ultimi due punti non soddisfano la condizione di moto laminare, per cui la corrispondente velocità reale, imposta dal flusso turbolento, sarà inferiore a quanto presente nel grafico.

Ai fini della discussione che viene proposta qui questa informazione anche approssimata è sufficiente.

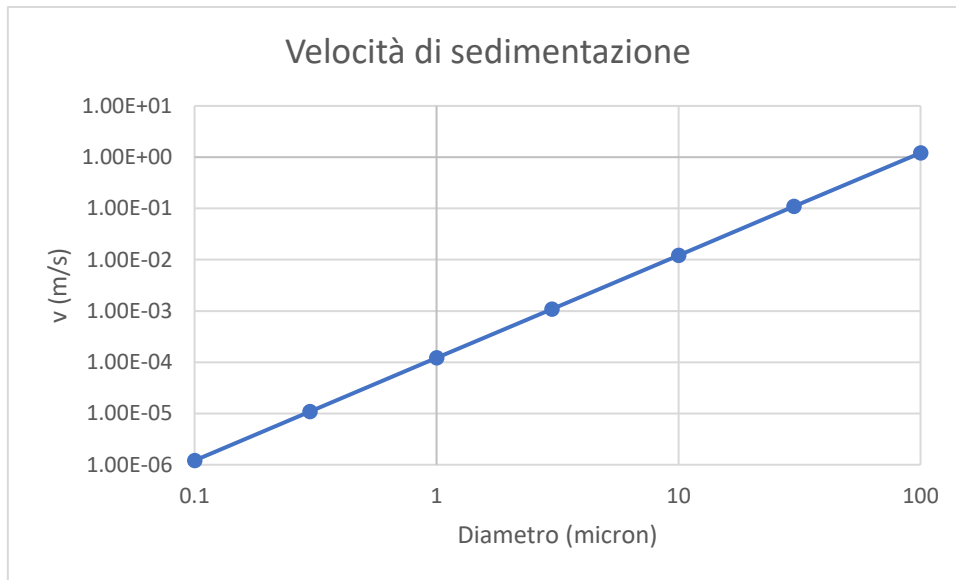


Figura 1: velocità di sedimentazione ottenuta come calcolata nel testo, in funzione del diametro della gocciolina. La velocità per gli ultimi due punti (30 e 100  $\mu\text{m}$ ) è sovrastimata dall'approssimazione di Stokes.

### Tempo di rilassamento e tempo scala di arresto

Prima di procedere è bene chiarire che la velocità ottenuta sopra viene raggiunta in un tempo finito in cui si raggiunge l'equilibrio tra le due forze scritte sopra.

Ci occupiamo dapprima del tempo che impiega una gocciolina che, partendo da ferma, accelera sotto l'azione della gravità per raggiungere la velocità di sedimentazione scritta sopra.

Il tempo  $\tau$  necessario per raggiungere l'equilibrio tra le forze si ottiene uguagliando i momenti:

$$F \tau_s = m v_s$$

Nel regime laminare si ottiene quindi:

$$\tau_s = \frac{2}{9} \frac{\rho_L r^2}{\eta}$$

che risulta indipendente dalla velocità di sedimentazione.

Al di fuori del regime di Stokes, l'attrito essendo maggiore, il risultato ottenuto sopra comporta una sovrastima del tempo di rilassamento reale, che è più piccolo.

In Figura 2 si riportano i tempi di rilassamento per le stesse goccioline di Figura 1.



Figura 2: tempo scala di rilassamento in funzione del diametro delle goccioline.

Viceversa, se la gocciolina non parte da ferma ma comincia il suo moto con una certa velocità  $v_0$ , l'attrito viscoso inizialmente la rallenta fino a portare in equilibrio le forze, come prima. Il tempo scala necessario a raggiungere questo equilibrio si calcola considerando la decelerazione a cui è sottoposta la gocciolina:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{F}{m}$$

Chiaramente la velocità iniziale determina se valga o meno l'approssimazione di flusso laminare. Anche in questo caso, tuttavia, risolveremo il problema nel caso laminare tenendo presente che l'attrito nel caso turbolento è maggiore, quindi il tempo di arresto sarà inferiore al valore che troveremo, che quindi rappresenterà una sovrastima del valore reale.

Sostituendo l'espressione sopra scritta per  $F$  in approssimazione di Stokes, e la massa, si ottiene:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho_d r^2} v$$

che ammette una soluzione esponenziale decrescente con un tempo caratteristico:

$$v = v_0 e^{-t/\tau_s} \quad \tau_s = \frac{2}{9} \frac{\rho_d r^2}{\eta}$$

Si noti che è lo stesso tempo ottenuto nel caso precedente, e riportato in Figura 2. Questo è dovuto al fatto che dal punto di vista la condizione in entrambi i casi è la medesima, l'equilibrio tra le due forze.

Al variare della velocità iniziale  $v_0$ , tuttavia, la gocciolina percorre distanze diverse. Integrando la soluzione si ottiene:

$$x = v_0 \tau_s (1 - e^{-\frac{t}{\tau_s}})$$

Valutando la soluzione a tempo infinito si ottiene lo spazio percorso prima di arrestarsi:

$$x_s = v_0 \tau_s$$

Evidentemente, se la gocciolina è diretta verso il basso, prosegue con il suo moto di sedimentazione.

In Figura 3 si riportano le distanze di arresto per tre valori di velocità iniziale, compatibili con le velocità riportate sopra per l'emissione dalle vie aeree: 1, 5, 10 m/s, curve rossa, grigia, gialla rispettivamente.

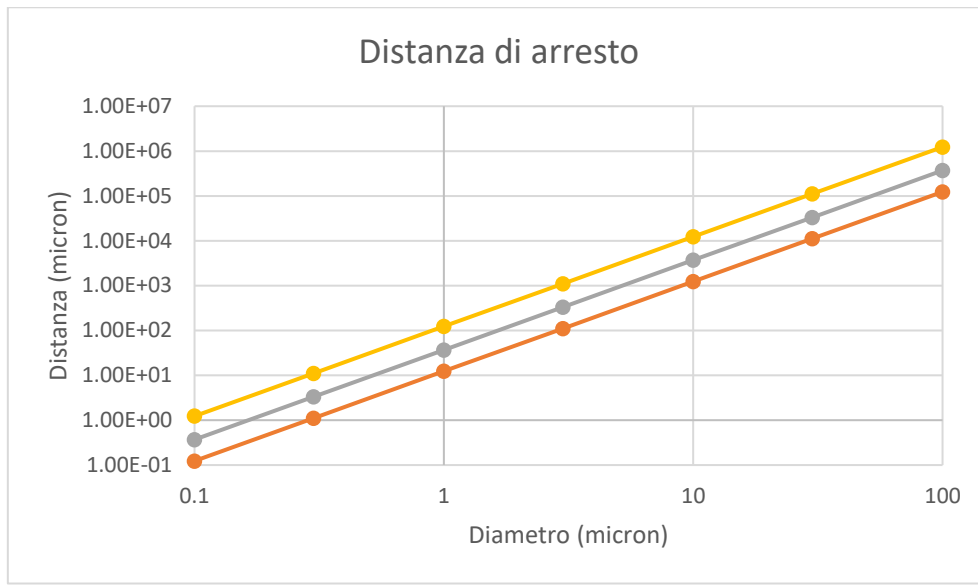


Figura 3: distanze di arresto in funzione del diametro delle goccioline per tre valori di velocità iniziale: 1 m/s rosso, 5 m/s grigio, 10 m/s giallo.

Nel caso turbolento, invece, l'equazione differenziale diventa non-lineare, essendo  $F$  dipendente da  $v^2$  nonché da  $C_d$ , che a sua volta dipende da  $v$ . La soluzione va quindi trovata numericamente, cosa che non verrà discussa qui. L'ordine di grandezza del risultato è lo stesso, i valori differendo per un fattore pari a circa 2 per diametri di 100 micron dove la discrepanza è maggiore.

## Diffusione delle goccioline in aria

Un altro aspetto che va considerato, almeno in linea di principio, è il moto delle goccioline sottoposte alle collisioni delle molecole d'aria circostanti, che imprimono un moto casuale detto di diffusione Browniana. Tale moto viene quantificato mediante l'equazione *Equazione della Diffusione*, che contiene un parametro detto *coefficiente di diffusione* caratteristico di un corpo avente una certa dimensione in un fluido con temperatura e viscosità fissate. Tale coefficiente nella sua espressione dovuta a Stokes e Einstein risulta:

$$D_g = \frac{k_B T}{6\pi\eta r}$$

$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ K}^{-1}$  è la Costante di Boltzmann

$T$  = temperatura assoluta dell'aria

Sostituendo i valori numerici per  $T = 15^\circ\text{C}$  si ottiene la seguente dipendenza dal raggio della gocciolina:

$$D_p = \frac{12.1}{r} \quad \mu\text{m}^2/\text{s}$$

dove anche il raggio della gocciolina è espresso in micron.

Questo coefficiente permette di valutare la distanza quadratica media percorsa da una gocciolina in un intervallo di tempo fissato. Tale distanza si ottiene semplicemente come:

$$\langle x \rangle = \sqrt{6D_p t}$$

A titolo di esempio, cerchiamo la distanza quadratica media percorsa in 1 s. I risultati sono riportati in Figura 4. Si noti che la distanza è espressa in micron.

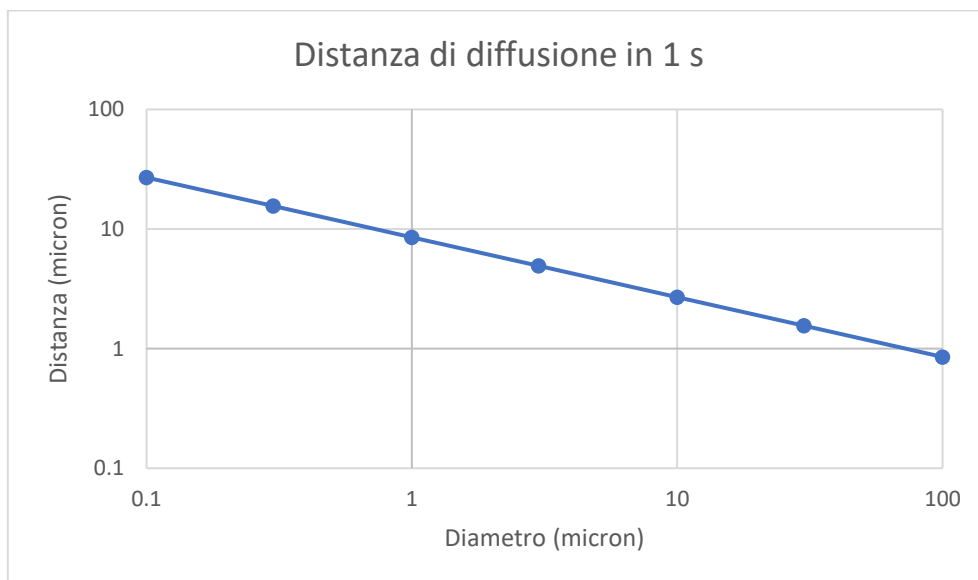


Figura 4: distanza quadratica media percorsa per diffusione Browniana da goccioline in aria.

Questi valori sono da confrontare con le velocità e i tempi caratteristici trovati precedentemente.

## Conclusioni preliminari

Quanto ottenuto finora mostra chiaramente che, entro l'approssimazione di moto laminare e quindi utilizzando la Legge di Stokes per la forza viscosa sulle goccioline, si ottiene quanto segue:

- 1) Una gocciolina raggiunge il moto stazionario, o alternativamente si arresta, in tempi che raggiungono al massimo 0.1 s per le particelle più grandi (100  $\mu\text{m}$ ), mentre i tempi scendono fino a  $10^{-7}$  s per le più piccole (0.1  $\mu\text{m}$ ). Con le velocità di sedimentazione ottenute sopra e le distanze in gioco, dell'ordine del metro, questi tempi sono trascurabilmente piccoli.
- 2) La gocciolina sedimenta in tempi dell'ordine del secondo o molto maggiori, con velocità che raggiungono l'ordine di grandezza di 1 m/s solo per le più grandi (100  $\mu\text{m}$ ).
- 3) Tutte le goccioline presentano una diffusione Browniana trascurabile.

Tenendo poi presente che, nel caso in cui si dovessero introdurre le correzioni per il flusso turbolento, i risultati sarebbero sovrastimati per le velocità di sedimentazione, per i tempi di rilassamento e per le distanze di arresto, si può concludere che per la gran parte della distribuzione dimensionale le goccioline sono come "bloccate" in aria per tempi dell'ordine dei secondi: solo le goccioline più grandi (100  $\mu\text{m}$ ) mostrerebbero un lento moto di caduta al suolo. Beninteso, tutto questo vale in aria ferma: per lo stesso argomento appena discusso, qualsiasi moto dell'aria in cui si trovano le goccioline le porta con sé, con le più grandi che presentano una componente di caduta al suolo dell'ordine del m/s.

In altre parole, **le goccioline si comportano come se non avessero inerzia**, cioè come se non avessero massa, e seguono strettamente il moto del fluido che le contiene. Notiamo tuttavia che non si comportano come le molecole d'aria, che invece hanno un coefficiente di diffusione  $10^6$  volte maggiore, ovvero diffondono a distanze molto maggiori nello stesso tempo (diversi mm in 1 s).

Quindi le goccioline sono "bloccate" nell'aria, il loro moto è completamente determinato da quello di quest'ultima e possono raggiungere un bersaglio unicamente se vi vengono trasportate dall'aria.

Inoltre, se una massa d'aria incide contro un ostacolo lo aggira, trasportando con sé le goccioline che generalmente non vi si possono fermare sopra. Di conseguenza, l'unica possibilità di portare le goccioline d'aria all'interno del nostro corpo è quello di inspirare la massa d'aria che le contiene.

La velocità di sedimentazione va quindi confrontata con le velocità tipiche delle masse d'aria. Nel caso del vento, o delle correnti d'aria, che possono raggiungere velocità dell'ordine di qualche m/s, i moti di sedimentazione sono pressoché trascurabili. Un caso meno ovvio e un po' più complesso è rappresentato dalla convezione, il galleggiamento di una massa d'aria scaldata dal basso che si solleva rispetto all'aria circostante: la velocità in questo caso può essere ricavata da un altro ragionamento riportato qui sotto, che necessita di valutare alcuni parametri nell'ambito della complessa fenomenologia dei moti di un fluido fuori equilibrio.



## Convezione naturale dell'aria

In assenza di vento o correnti d'aria, nei luoghi chiusi ad esempio, il moto delle masse d'aria è prevalentemente dovuto alla convezione naturale, indotta da differenze di temperatura tra strati d'aria a quote diverse. Per esempio, si pensi alle piccole differenze di temperatura che si formano in una stanza.

In generale la scelta dell'approccio di calcolo è complessa: ci limitiamo a considerare e introdurre i parametri da valutare per stabilire le condizioni di moto della massa d'aria riscaldata e le relazioni che forniscono una stima per gli ordini di grandezza della sua velocità.

Il sistema che descriviamo presenta una differenza di temperatura  $\Delta T$  tra due strati orizzontali alla distanza  $L$  (esemplificativa di una lunghezza scala tipica). La convezione avviene grazie alla variazione della densità dell'aria a causa dell'incremento di temperatura. Il parametro che determina tale variazione è il coefficiente di espansione termica,  $\beta$ . Per la Legge dei gas ideali,  $pV = nRT$ , si ha che per un gas ideale vale la relazione semplice  $\beta = 1/T$ , che applicheremo qui anche per l'aria con un'approssimazione più che ragionevole.

Sulla base della teoria della convezione si ricava che il regime in cui si trova il sistema è caratterizzato dall'equilibrio tra le forze d'inerzia e la forza di galleggiamento, mentre le forze viscosive sono trascurabili. Si ottiene questo risultato valutando il *Numero di Grashov*:

$$Gr = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu^2}$$

dove  $\nu = \eta/\rho_a$  è la viscosità cinematica. Questa scelta può essere operata grazie al fatto che stiamo considerando come fluido l'aria: in generale non è sempre applicabile (vedi più avanti).

Sostituendo i valori numerici nel Numero di Grashov si ottiene che tale grandezza adimensionale vale circa  $10^8 \gg 1$ : sulla base della teoria della convezione si trova che le forze viscosive sono trascurabili. L'equilibrio della massa d'aria si instaura quindi tra le forze d'inerzia e le forze di galleggiamento; dividendo per la massa e equilibrando le accelerazioni (quella inerziale espressa mediante la derivata euleriana), si ha:

$$|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}| \sim g \beta \Delta T$$

dove  $\mathbf{u}$  è il vettore velocità. Procedendo per differenze finite con le grandezze scala in gioco, si ottiene:

$$u^2/L \sim g \beta \Delta T$$

Da cui l'espressione per la stima della velocità:

$$u \sim (g \beta L \Delta T)^{1/2}$$

Sostituendo i valori sopra utilizzati per le stime precedenti, e utilizzando  $\Delta T = 1^\circ\text{C}$  e  $L = 1\text{ m}$ , si ottiene:

$$u \sim 0.2\text{ m/s}$$

Questo valore va confrontato con la velocità di sedimentazione delle goccioline, che avviene rispetto al fluido circostante: quando la corrente convettiva si muove (verso l'alto) a velocità maggiore della velocità di sedimentazione, la gocciolina salirà ad una velocità rispetto alla stanza data dalla loro somma vettoriale.

## Conclusioni sulla convezione

Sulla base dei risultati sulla sedimentazione riportati in Fig. 1, si osserva che tutte le goccioline eccetto quelle con diametro maggiore di circa 30 micron vengono trasportate verso l'alto da un flusso convettivo innescato da una minima differenza di temperatura, 1 °C. Questo sotto le approssimazioni, non piccole, di quest'ultimo calcolo e con i parametri utilizzati. Come sempre però, anche se non possiamo fare affidamento sui valori precisi dei risultati, gli ordini di grandezza che troviamo ci danno un'idea dei fenomeni in gioco.

Di conseguenza possiamo concludere che un banale moto convettivo in una stanza può facilmente mantenere in sospensione per tempi molto lunghi quasi tutte le goccioline che vengono generate.

NOTA: Il criterio adottato qui basato sul Numero di Grashov è applicabile solo per quei fluidi che presentano una caratteristica, descritta da un altro numero adimensionale, il *Numero di Prandtl*, che deve essere all'incirca unitario. Il Numero di Prandtl è definito come segue:

$$Pr = \frac{\mu}{\rho_a \kappa}$$

$\kappa = k/\rho_a C_p$  è la diffusività termica dell'aria, che si ottiene come rapporto tra la conducibilità termica,  $k$ , e il prodotto di densità e calore specifico a pressione costante,  $C_p$ . Per l'aria nelle nostre condizioni si ha:

$$k = 2.5 \cdot 10^{-2} \text{ W/mK}$$

$$C_p = 1005 \text{ J/KgK}$$

Il Numero di Prandtl per l'aria vale circa  $Pr = 0.7$ , molto vicino a 1, il che permette di utilizzare il criterio del Numero di Grashov adottato sopra per stabilire se nell'equilibrio che determina la convezione prevalgono le forze d'inerzia, come nel nostro caso, oppure quelle viscosi (che nel nostro caso sono trascurabili).

## Evaporazione in volo

Una gocciolina in aria evapora e le sue dimensioni diminuiscono nel tempo. Durante un lasso di tempo relativamente breve, però, la sua temperatura decresce a causa dell'evaporazione fino a che il liquido non raggiunge la temperatura "di bulbo umido" e si forma un sottile strato di vapore saturo intorno alla gocciolina. Poiché la sua temperatura è diventata minore di quella dell'aria circostante, l'evaporazione è d'ora in avanti sostenuta da un flusso di calore che procede dall'aria circostante verso la gocciolina stessa.

Di seguito diamo una versione semplificata e basata su alcune relazioni empiriche di questo fenomeno, da cui ricaveremo il tempo caratteristico con cui la goccia evapora in aria.

Il tempo di evaporazione dipende dalla superficie della goccia e dalla differenza di temperatura di bulbo umido, cioè dello strato di vapore saturo, e la temperatura dell'aria circostante, ossia la "temperatura di bulbo secco". La temperatura di bulbo secco è la temperatura che misura un termometro con il bulbo esposto all'aria. La temperatura di bulbo umido è invece misurata con un termometro a cui venga avvolto il bulbo sensibile con un materiale poroso contenente acqua (un panno bagnato), tenuto costantemente sottoposto a flusso d'aria: questo strumento si dice "psicrometro".

Lo psicrometro e la misura delle due temperature permettono di risalire alla pressione parziale di vapore d'acqua in aria, ossia al contributo alla pressione atmosferica dovuto alla presenza di vapore d'acqua. La pressione parziale di vapore varia tra 0 (aria secca) e un valore che dipende dalla temperatura, detto pressione di vapor saturo, che rappresenta la massima quantità di vapore che può essere presente in aria a una determinata temperatura. La pressione di vapor saturo segue la formula empirica:

$$p_{sat} = 610.7 \cdot 10^{\frac{7.5 T}{T+273.15}}$$

T = temperatura ambiente in °C; il prefattore 610.7 rappresenta la pressione di vapor saturo a 0°C.

Dalle misure delle due temperature introdotte sopra si ricava la pressione parziale di vapore secondo la relazione:

$$p = p_{sat} - \gamma (T - T_w)$$

dove  $p_{sat}$  è la pressione di vapor saturo alla temperatura di bulbo umido,  $T_w$  e  $\gamma$  è un parametro che dipende dalla pressione barometrica B dell'atmosfera e dalla temperatura a bulbo umido:

$$\gamma = 6.60 \cdot 10^{-4} B (1 + 1.15 \cdot 10^{-3} T_w)$$

e vale 76 Pa/K a 15°C.

Si definisce *umidità relativa* il rapporto:

$$RH = \frac{p}{p_{sat}}$$

Ricavare  $T_w$  dall'umidità relativa e dalla temperatura dell'aria non è immediato a causa della dipendenza dei parametri dall'incognita stessa. Esistono quindi dei digrammi di RH in funzione di T al variare di  $T_w$ , detti diagrammi psicrometrici, che permettono di ricavare  $T_w$ . Alternativamente esistono alcune relazioni empiriche valide in determinati intervalli di temperatura. Tra 10 e 20°C e B = 1 atm si ha per esempio:

$$T_w = T - [(a_0 + a_1) + (b_0 + b_1)RH + (c_0 + c_1)RH^2]$$

$a_0 = 5.1055$ ;  $a_1 = 0.429$ ;  $b_0 = -4.7 \cdot 10^{-2}$ ;  $b_1 = -5.9 \cdot 10^{-3}$ ;  $c_0 = -4.0 \cdot 10^{-5}$ ;  $c_1 = 1.66 \cdot 10^{-5}$ .

La temperatura viene espressa in °C e RH in %.

Il tasso di decrescita del raggio della gocciolina nel tempo è descritto da un modello che tiene conto del flusso di calore proveniente dall'aria. Si definisce *costante di evaporazione* la grandezza:

$$K = - \frac{dr^2}{dt}$$

che ha le dimensioni di  $m^2/s$  (cioè di un coefficiente di diffusione). In realtà questo parametro è costante solamente per goccioline d'acqua di diametro maggiore di circa 300  $\mu m$ . Per dimensioni inferiori si ha:

$$K = 2 a (1 + b \sqrt{2 r v})$$

dove le costanti introdotte dipendono solo dalle condizioni ambientali e sono definite come segue:

$$a = \frac{4 M D_V(T_V)}{\rho_L R T_V} \Delta p$$

$$b = 0.276 \left( \frac{\rho_a(T_V)}{\eta(T_V) D_V^2(T_V)} \right)^{1/6}$$

$M$  = peso molecolare del liquido

$\rho_L$  = densità del liquido

$D_V$  = coefficiente di diffusione del vapore acqueo nello strato intorno alla goccia

$T_V$  = temperatura assoluta media del vapore nello strato

$R = 8.31 \text{ J/(mole K)}$  costante dei gas

$\Delta p$  = differenza tra la pressione di vapor saturo (vicino alla goccia) e nell'aria circostante

La temperatura  $T_V$  indicata tra parentesi indica che la variabile precedente viene valutata a questa temperatura.

Si nota che, poiché la dimensione della gocciolina  $r$  cambia nel tempo, anche la sua velocità  $v$  cambia di conseguenza. La maggior parte dei parametri introdotti varia però molto poco con la temperatura, per cui ai nostri fini li consideriamo fissati al valore corrispondente alla temperatura a cui viene studiato il sistema. Fa eccezione la differenza di pressione  $\Delta p$ , che è poi la responsabile del trasporto di calore dall'aria alla superficie della gocciolina che ne causa l'evaporazione. Sulla base di quanto detto sopra si ha:

$$\Delta p = p_{sat} - p = \gamma (T - T_w) = \gamma \Delta T$$

Introducendo la variazione dalla temperatura di  $\Delta p$  nell'espressione per  $a$  si ottiene:

$$a = \frac{4 M D_V(T_V)}{\rho_L R T_V} \gamma \Delta T$$

Consideriamo adesso una gocciolina che cade rispetto al fluido circostante con una velocità pari alla velocità di sedimentazione studiata precedentemente. L'equazione non lineare per la costante  $K$  può venire risolta mediante un'approssimazione lineare. I fattori  $a$  e  $b$  non dipendono dalla dimensione della gocciolina,  $r$ , quindi la dipendenza da  $r$  entra solo tramite il radicale nel secondo addendo tra le parentesi. Si può effettuare l'approssimazione seguente:

$$\sqrt{2rv} \sim A r + C$$

dove  $A = 64.6$ ;  $C = -1.12 \cdot 10^{-3}$ . L'equazione per  $K$  diventa quindi:

$$K = q_0 \Delta T (1 + 2 q_1 r)$$

con:

$$q_0 = \frac{2 a}{\Delta T} (1 + b C)$$

$$q_1 = \frac{b A}{1 + b C}$$

Poiché  $a$  e  $b$  dipendono poco da  $T$ , anche queste due ultime grandezze potremo considerarle fissate.

Dopo il transitorio durante il quale la gocciolina forma lo strato di vapor saturo che la circonda, che di fatto è molto breve, si ha che l'equazione che descrive la variazione del raggio nel tempo può essere scritta osservando che:

$$K = - \frac{dr^2}{dt} = - 2 r \frac{dr}{dt}$$

che, invertita per semplicità nella soluzione seguente, fornisce insieme alla forma approssimata per  $K$  trovata poco sopra l'equazione:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{- 2 r}{q_0 \Delta T (1 + 2 q_1 r)} = \\ &= \frac{-2}{q_0 q_1 \Delta T} \left( 1 - \frac{1}{1 + 2 q_1 r} \right) \end{aligned}$$

Integrando si ottiene la seguente espressione:

$$t(r) = \frac{-4 q_1 r}{q_0 q_1^2 \Delta T} + \frac{2}{q_0 q_1^2 \Delta T} \ln(1 + 2 q_1 r) + c$$

La costante di integrazione  $c$  si ottiene imponendo che per  $t = 0$  il raggio sia pari al raggio iniziale,  $r_0$ . Il tempo di evaporazione è il tempo necessario affinché il raggio si annulli, quindi:

$$t = \frac{2}{q_0 q_1^2 \Delta T} [2 q_1 r - \ln(1 + 2 q_1 r_0)]$$

Per goccioline piccole si può sviluppare il logaritmo in serie e ottenere:

$$t = \frac{2 r_0^2}{q_0 \Delta T}$$

Questo vale evidentemente per  $2 q_1 r_0 \ll 1$ , ovvero quando  $r_0 \ll 120 \mu\text{m}$ , quindi va praticamente sempre bene nel nostro intervallo dimensionale.

Nelle Figure 5, 6 e 7 si riportano i grafici del tempo di evaporazione delle goccioline in funzione del diametro. Le condizioni ambientali considerate sono sempre  $T = 15^\circ\text{C}$ , mentre l'umidità dell'aria varia:  $RH = 30\%$ ,  $70\%$ ,  $95\%$ . Per gli altri parametri si sono usati i valori seguenti:

$$M = 0.018 \text{ kg/mole}$$

$$\rho_L = 998 \text{ kg/m}^3$$

$$T = 15^\circ\text{C}$$

$$T_V = T_W = 7.3^\circ\text{C}; 11.9^\circ\text{C}; 14.45^\circ\text{C} \text{ rispettivamente per i tre valori di } RH$$

$$D_V(T_V) = 2.3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

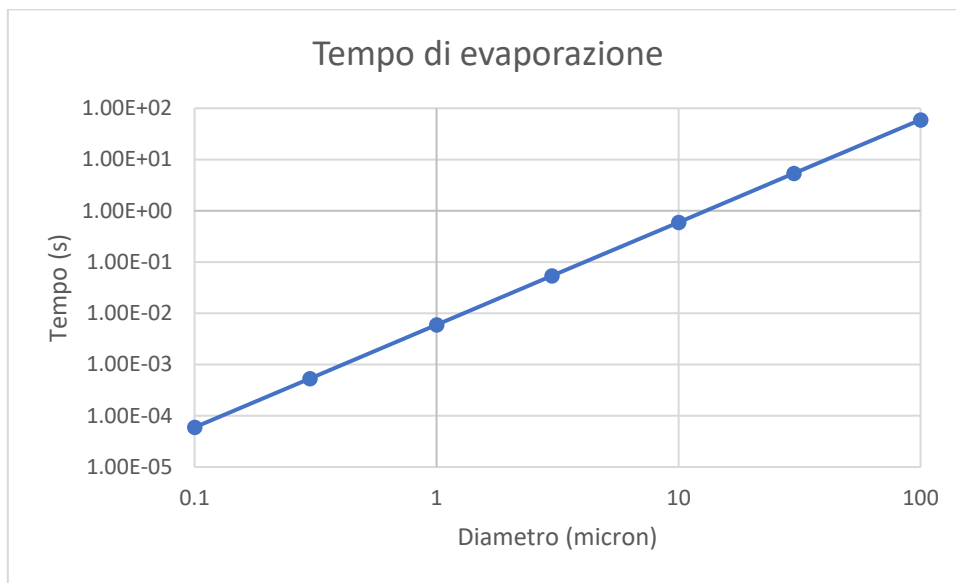


Figura 5: dipendenza del tempo di evaporazione delle goccioline dal loro diametro, calcolato per  $T = 15^\circ\text{C}$  e  $RH = 30\%$ .



Figura 6: dipendenza del tempo di evaporazione delle goccioline dal loro diametro, calcolato per  $T = 15^\circ\text{C}$  e  $RH = 70\%$ .



Figura 7: dipendenza del tempo di evaporazione delle goccioline dal loro diametro, calcolato per  $T = 15^{\circ}\text{C}$  e  $RH = 95\%$ .

## Conclusioni

In conclusione, possiamo grossolanamente dividere le goccioline in due classi: quelle con dimensioni maggiori di qualche micron, per le quali il tempo di evaporazione supera tempi dell'ordine del secondo, e goccioline più piccole che evaporano molto più rapidamente. Le goccioline di dimensioni maggiori in assoluto (con diametri dell'ordine 100 micron) potrebbero permanere per tempi che possono raggiungere circa 15 minuti, ma d'altra parte cadono al suolo in tempi decisamente inferiori. I tempi di evaporazione su di una superficie cambiano completamente, dipendendo fortemente da essa e dalle sue condizioni, quindi questo tipo di comportamento non viene descritto da quanto discusso qui.

Le goccioline di dimensioni inferiori a qualche micron invece, vincolate al moto delle masse d'aria in cui si trovano, presentano un processo di evaporazione in tempi trascurabilmente piccoli rispetto ai corrispondenti tempi di sedimentazione. Considerando un ambiente aperto, dove le velocità dell'aria tipiche sono dell'ordine del m/s (in assenza di vento), troviamo anche che il tempo di evaporazione è molto più rapido del tempo necessario al trasporto ad una distanza di riferimento di 1 m, per esempio. In un ambiente chiuso e non aereato, invece, l'aria è mossa prevalentemente per convezione e tende a mantenere sospese le goccioline che evaporano prima di sedimentare.

Si conclude quindi che le goccioline d'acqua emesse con la respirazione, che hanno dimensioni generalmente inferiori a pochi micron, sono destinate a evaporare in aria in tempi trascurabilmente piccoli rispetto ai tempi di trasporto su distanze dell'ordine di un metro, lasciando esposto l'eventuale contenuto "secco".

Se una gocciolina contiene un patogeno, una volta evaporata l'acqua questo si troverà libero di venire trasportato dall'aria circostante in condizioni identiche a quelle discusse sopra per le goccioline più piccole

(<100 nm circa per i virus). Resterà sospeso in aria e sottoposto ai moti convettivi o alle correnti d'aria a cui è sottoposta l'aria stessa, potendo entrare all'interno delle vie aeree quando venga inspirato direttamente; oppure, in ambiente aperto, venendo esposto all'azione degli eventuali raggi solari che possono inibirne la potenzialità di contagio.

Questo tipo di comportamento motiva probabilmente anche il fatto che le mascherine abbiano sostanzialmente due ruoli, ben distinti e con efficacie ben diverse tra loro:

- 1) Fermare le goccioline in uscita dalle vie aeree: l'efficienza filtrante è abbastanza elevata poiché le goccioline sono ancora relativamente grandi: fermando la gocciolina si ferma anche l'eventuale virus. La carica virale in questo caso rimane all'*interno* della mascherina. Di qui la necessità di cambiarle o lavarle spesso.
- 2) Filtrare quanto viene portato all'interno delle vie aeree quando inspiriamo: visto quanto ottenuto sopra, l'efficienza delle mascherine come barriera contro il contagio è molto limitata o addirittura nulla. Le goccioline sono in prevalenza già evaporate, lasciando la sostanza secca contenuta, tra cui l'eventuale carica virale, libera in aria. Se si tratta di singoli virus, si parla di oggetti di <100 nm di diametro che difficilmente vengono fermati dalla mascherina.

Infine, secondo quanto si ottiene da questi semplici calcoli, poiché il virus viene veicolato dalle masse d'aria e dal loro moto, sembra ragionevole concludere che senza l'uso delle mascherine che bloccano le goccioline il contagio possa avvenire ben oltre la distanza di uno o due metri dalla persona che inevitabilmente le emette. Soprattutto in un ambiente chiuso, la concentrazione di virus tenderà a crescere nel tempo.